

考研专项突破系列——数学

恩波考研 logo

考研全国第一品牌

# 考研数学核心知识必备

★考研数学公式完全手册

线性代数必考知识点梳理★

恩波考研数学名师在线答疑专区

[www.enboedu.com](http://www.enboedu.com)

## 目 录

### 第一部分:

高等数学公式

### 第二部分:

线性代数必考知识点

### 第三部分:

概率公式

## 第一部分: 高等数学公式

### 1. 导数公式:

$$\begin{aligned}
 (tgx)' &= \sec^2 x & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (ctgx)' &= -\csc^2 x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\sec x)' &= \sec x \cdot tgx & (\arctgx)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
 (\csc x)' &= -\csc x \cdot ctgx & (\text{arcctgx})' &= -\frac{1}{1+x^2} \\
 (a^x)' &= a^x \ln a \\
 (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}
 \end{aligned}$$

### 2. 基本积分表:

$$\begin{aligned}
 \int tgx dx &= -\ln|\cos x| + C & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \int \sec^2 x dx = tgx + C \\
 \int ctgx dx &= \ln|\sin x| + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= \int \csc^2 x dx = -ctgx + C \\
 \int \sec x dx &= \ln|\sec x + tgx| + C & \int \sec x \cdot tgx dx &= \sec x + C \\
 \int \csc x dx &= \ln|\csc x - ctgx| + C & \int \csc x \cdot ctgx dx &= -\csc x + C \\
 \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\
 \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C & \int shx dx &= chx + C \\
 \int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C & \int chx dx &= shx + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C
 \end{aligned}$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

## 3. 三角函数的有理式积分:

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

## 一些初等函数:

$$\text{双曲正弦: } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲余弦: } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲正切: } thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

## 两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281828459045\dots$$

## 三角函数公式:

## • 诱导公式:

函数 角 A	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$90^\circ - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$90^\circ + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$180^\circ - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$360^\circ + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

## • 和差角公式:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

## • 和差化积公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

恩波考研

## • 倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

## • 半角公式:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

• 正弦定理:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

• 余弦定理:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

• 反三角函数性质:  $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$

## 高阶导数公式——莱布尼兹 (Leibniz) 公式:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

## 中值定理与导数应用:

拉格朗日中值定理:  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理:  $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当  $F(x) = x$  时, 柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

## 曲率:

弧微分公式:  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$ , 其中  $y' = \tan \alpha$

平均曲率:  $\bar{K} = \frac{|\Delta \alpha|}{\Delta s}$ .  $\Delta \alpha$ : 从M点到M'点, 切线斜率的倾角变化量;  $\Delta s$ : MM'弧长。

M点的曲率:  $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \alpha|}{\Delta s} = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$ .

直线:  $K = 0$ ;

半径为a的圆:  $K = \frac{1}{a}$ .

**定积分的近似计算:**

矩形法:  $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$

梯形法:  $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} \left[ \frac{1}{2} (y_0 + y_n) + y_1 + \dots + y_{n-1} \right]$

抛物线法:  $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{3n} [(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})]$

**定积分应用相关公式:**

功:  $W = F \cdot s$

水压力:  $F = p \cdot A$

引力:  $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ,  $k$ 为引力系数

函数的平均值:  $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

均方根:  $\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt}$

**空间解析几何和向量代数:**

空间2点的距离:  $d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

向量在轴上的投影:  $\text{Pr } j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi$ ,  $\varphi$  是  $\overrightarrow{AB}$  与  $u$  轴的夹角。

$\text{Pr } j_u (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Pr } j_u \vec{a}_1 + \text{Pr } j_u \vec{a}_2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ , 是一个数量,

两向量之间的夹角:  $\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ ,  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$ . 例: 线速度:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

向量的混合积:  $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha$ ,  $\alpha$  为锐角时,

代表平行六面体的体积。

平面的方程:

1、点法式:  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ , 其中  $\vec{n} = \{A, B, C\}$ ,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

2、一般方程:  $Ax + By + Cz + D = 0$

3、截距式方程:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

平面外任意一点到该平面的距离:  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

空间直线的方程:  $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$ , 其中  $\vec{s} = \{m, n, p\}$ ; 参数方程:  $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

二次曲面:

1、椭球面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

2、抛物面:  $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ , ( $p, q$  同号)

3、双曲面:

单叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

双叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (马鞍面)

**多元函数微分法及应用**

$$\text{全微分: } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

全微分的近似计算:  $\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

多元复合函数的求导法:

$$z = f[u(t), v(t)] \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$z = f[u(x, y), v(x, y)] \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

当  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  时,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

隐函数的求导公式:

$$\text{隐函数 } F(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{隐函数 } F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

$$\text{隐函数方程组: } \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

微分法在几何上的应用:

$$\text{空间曲线} \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \text{在点 } M(x_0, y_0, z_0) \text{ 处的切线方程: } \frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

在点  $M$  处的法平面方程:  $\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0$

若空间曲线方程为:  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ , 则切向量  $\vec{T} = \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right\}$

曲面  $F(x, y, z) = 0$  上一点  $M(x_0, y_0, z_0)$ , 则:

1、过此点的法向量:  $\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$

2、过此点的切平面方程:  $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$

3、过此点的法线方程:  $\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

### 方向导数与梯度:

函数  $z = f(x, y)$  在一点  $p(x, y)$  沿任一方向  $l$  的方向导数为:  $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$

其中  $\varphi$  为  $x$  轴到方向  $l$  的转角。

函数  $z = f(x, y)$  在一点  $p(x, y)$  的梯度:  $\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$

它与方向导数的关系是:  $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f(x, y) \cdot \vec{e}$ , 其中  $\vec{e} = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$ , 为  $l$  方向上的单位向量。

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}$  是  $\text{grad} f(x, y)$  在  $l$  上的投影。

### 多元函数的极值及其求法:

设  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ , 令:  $f_{xx}(x_0, y_0) = A$ ,  $f_{xy}(x_0, y_0) = B$ ,  $f_{yy}(x_0, y_0) = C$

则:  $\begin{cases} AC - B^2 > 0 \text{ 时, } \begin{cases} A < 0, (x_0, y_0) \text{ 为极大值} \\ A > 0, (x_0, y_0) \text{ 为极小值} \end{cases} \\ AC - B^2 < 0 \text{ 时, } & \text{无极值} \\ AC - B^2 = 0 \text{ 时, } & \text{不确定} \end{cases}$

### 重积分及其应用:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\text{曲面 } z = f(x, y) \text{ 的面积 } A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\text{平面薄片的重心: } \bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$$

$$\text{平面薄片的转动惯量: 对于 } x \text{ 轴 } I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad \text{对于 } y \text{ 轴 } I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma$$

平面薄片 (位于  $xoy$  平面) 对  $z$  轴上质点  $M(0, 0, a)$ , ( $a > 0$ ) 的引力:  $F = \{F_x, F_y, F_z\}$ , 其中:

$$F_x = f \iint_D \frac{\rho(x, y) x d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_y = f \iint_D \frac{\rho(x, y) y d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_z = -fa \iint_D \frac{\rho(x, y) d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**柱面坐标和球面坐标:**

$$\text{柱面坐标: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \\ z = z \end{cases} \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \theta, z) r dr d\theta dz,$$

其中:  $F(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$

$$\text{球面坐标: } \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad dv = r d\varphi \cdot r \sin \varphi \cdot d\theta \cdot dr = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi, \theta)} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr$$

$$\text{重心: } \bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho dv, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho dv, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho dv, \quad \text{其中 } M = \iiint_{\Omega} \rho dv$$

$$\text{转动惯量: } I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho dv, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho dv, \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dv$$

**曲线积分:**

第一类曲线积分 (对弧长的曲线积分):

设  $f(x, y)$  在  $L$  上连续,  $L$  的参数方程为:  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ , ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), 则:

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta) \quad \text{特殊情况: } \begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

第二类曲线积分 (对坐标的曲线积分):

设  $L$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ , 则:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt$$

两类曲线积分之间的关系:  $\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds$ , 其中  $\alpha$  和  $\beta$  分别为  $L$  上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式:  $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L Pdx + Qdy$  格林公式:  $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L Pdx + Qdy$

当  $P = -y, Q = x$ , 即:  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$  时, 得到  $D$  的面积:  $A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$

·平面上曲线积分与路径无关的条件:

1、 $G$  是一个单连通区域;

2、 $P(x, y), Q(x, y)$  在  $G$  内具有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 。注意奇点, 如  $(0,0)$ , 应

减去对此奇点的积分, 注意方向相反!

·二元函数的全微分求积:

在  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  时,  $Pdx + Qdy$  才是二元函数  $u(x, y)$  的全微分, 其中:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \text{ 通常设 } x_0 = y_0 = 0.$$

**曲面积分:**

对面积的曲面积分:  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$

对坐标的曲面积分:  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$ , 其中:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy, \text{ 取曲面的上侧时取正号;}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz, \text{ 取曲面的前侧时取正号;}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx, \text{ 取曲面的右侧时取正号。}$$

两类曲面积分之间的关系:  $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$

**高斯公式:**

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

高斯公式的物理意义 —— 通量与散度:

散度:  $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ , 即: 单位体积内所产生的流体质量, 若  $\operatorname{div} \vec{v} < 0$ , 则为消失...

$$\text{通量: } \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\Sigma} A_n ds = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

因此, 高斯公式又可写成:  $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} dv = \oiint_{\Sigma} A_n ds$

**斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系:**

$$\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

$$\text{上式左端又可写成: } \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

空间曲线积分与路径无关的条件:  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\text{旋度: } \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

向量场  $\vec{A}$  沿有向闭曲线  $\Gamma$  的环流量:  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{\tau} ds$

**常数项级数:**

$$\text{等比数列: } 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{等差数列: } 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

调和级数:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$  是发散的

**级数审敛法:**

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

$$\text{设: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}, \text{ 则} \begin{cases} \rho < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

2、比值审敛法：

$$\text{设: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}, \text{ 则} \begin{cases} \rho < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

3、定义法：

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  存在, 则收敛; 否则发散。

交错级数  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$  (或  $-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$ ) 的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足  $\begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases}$ , 那么级数收敛且其和  $s \leq u_1$ , 其余项  $r_n$  的绝对值  $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。

**绝对收敛与条件收敛：**

(1)  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ , 其中  $u_n$  为任意实数;

(2)  $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$

如果(2)收敛, 则(1)肯定收敛, 且称为绝对收敛级数;

如果(2)发散, 而(1)收敛, 则称(1)为条件收敛级数。

调和级数:  $\sum \frac{1}{n}$  发散, 而  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  收敛;

级数:  $\sum \frac{1}{n^2}$  收敛;

$p$  级数:  $\sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} p \leq 1 \text{ 时发散} \\ p > 1 \text{ 时收敛} \end{cases}$

**幂级数：**

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \begin{cases} |x| < 1 \text{ 时, 收敛于 } \frac{1}{1-x} \\ |x| \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$$

对于级数(3) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ , 如果它不是仅在原点收敛, 也不是在全

数轴上都收敛, 则必存在 $R$ , 使  $\begin{cases} |x| < R \text{ 时收敛} \\ |x| > R \text{ 时发散, 其中 } R \text{ 称为收敛半径。} \\ |x| = R \text{ 时不定} \end{cases}$

求收敛半径的方法: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ , 其中 $a_n, a_{n+1}$ 是(3)的系数, 则  $\begin{cases} \rho \neq 0 \text{ 时, } R = \frac{1}{\rho} \\ \rho = 0 \text{ 时, } R = +\infty \\ \rho = +\infty \text{ 时, } R = 0 \end{cases}$

**函数展开成幂级数:**

函数展开成泰勒级数:  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$

余项:  $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ,  $f(x)$ 可以展开成泰勒级数的充要条件是:  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

$x_0 = 0$ 时即为麦克劳林公式:  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

**一些函数展开成幂级数:**

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

**欧拉公式:**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{或} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

**三角级数:**

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中,  $a_0 = 2A_0, a_n = A_n \sin \varphi_n, b_n = A_n \cos \varphi_n, \omega t = x$ 。

正交性:  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ 任意两个不同项的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分=0。

**傅立叶级数:**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{周期} = 2\pi$$

$$\text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n=0,1,2,\dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad \left| \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \text{ (相加)} \right.$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{24} \quad \left| \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \text{ (相减)} \right.$$

$$\text{正弦级数: } a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n=1,2,3,\dots \quad f(x) = \sum b_n \sin nx \text{ 是奇函数}$$

$$\text{余弦级数: } b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n=0,1,2,\dots \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx \text{ 是偶函数}$$

周期为  $2l$  的周期函数的傅立叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \text{ 周期} = 2l$$

$$\text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & (n=0,1,2,\dots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx & (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

微分方程的相关概念:

一阶微分方程:  $y' = f(x, y)$  或  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

可分离变量的微分方程: 一阶微分方程可以化为  $g(y)dy = f(x)dx$  的形式, 解法:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \quad \text{得: } G(y) = F(x) + C \text{ 称为隐式通解。}$$

齐次方程: 一阶微分方程可以写成  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , 即写成  $\frac{y}{x}$  的函数, 解法:

设  $u = \frac{y}{x}$ , 则  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ,  $u + \frac{du}{dx} = \varphi(u)$ ,  $\therefore \frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$  分离变量, 积分后将  $\frac{y}{x}$  代替  $u$ ,

即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程:

$$1、\text{一阶线性微分方程: } \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\begin{cases} \text{当 } Q(x) = 0 \text{ 时, 为齐次方程, } y = Ce^{-\int P(x)dx} \\ \text{当 } Q(x) \neq 0 \text{ 时, 为非齐次方程, } y = \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) e^{-\int P(x)dx} \end{cases}$$

$$2、\text{贝努力方程: } \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, (n \neq 0, 1)$$

全微分方程:

如果  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  中左端是某函数的全微分方程, 即:

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \text{ 其中: } \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

$\therefore u(x, y) = C$  应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \begin{cases} f(x) \equiv 0 \text{ 时为齐次} \\ f(x) \neq 0 \text{ 时为非齐次} \end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法:

(\*) $y'' + py' + qy = 0$ , 其中 $p, q$ 为常数;

求解步骤:

- 1、写出特征方程: $(\Delta)r^2 + pr + q = 0$ , 其中 $r^2$ ,  $r$ 的系数及常数项恰好是(\*)式中 $y'', y', y$ 的系数;
- 2、求出( $\Delta$ )式的两个根 $r_1, r_2$
- 3、根据 $r_1, r_2$ 的不同情况, 按下表写出(\*)式的通解:

$r_1, r_2$ 的形式	(*)式的通解
两个不相等实根( $p^2 - 4q > 0$ )	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根( $p^2 - 4q = 0$ )	$y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根( $p^2 - 4q < 0$ ) $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ ,  $p, q$ 为常数

$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型,  $\lambda$ 为常数;

$f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型

## 第二部分:线性代数必考知识点

### a、1、行列式

4.  $n$ 行列式共有 $n^2$ 个元素, 展开后有 $n!$ 项, 可分解为 $2^n$ 行列式;

5. 代数余子式的性质:

①、 $A_{ij}$ 和 $a_{ij}$ 的大小无关;

②、某行(列)的元素乘以其它行(列)元素的代数余子式为0;

③、某行(列)的元素乘以该行(列)元素的代数余子式为 $|A|$ ;

6. 代数余子式和余子式的关系:  $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$        $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

7. 设 $n$ 行列式 $D$ :

将 $D$ 上、下翻转或左右翻转, 所得行列式为 $D_1$ , 则 $D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ;

将 $D$ 顺时针或逆时针旋转 $90^\circ$ , 所得行列式为 $D_2$ , 则 $D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ;

将  $D$  主对角线翻转后 (转置), 所得行列式为  $D_3$ , 则  $D_3 = D$ ;

将  $D$  主副角线翻转后, 所得行列式为  $D_4$ , 则  $D_4 = D$ ;

### 8. 行列式的重要公式:

①、主对角行列式: 主对角元素的乘积;

②、副对角行列式: 副对角元素的乘积  $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ;

③、上、下三角行列式 ( $|\nabla| = |\blacktriangle|$ ): 主对角元素的乘积;

④、 $|\blacktriangledown|$  和  $|\blacktriangleleft|$ : 副对角元素的乘积  $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ;

⑤、拉普拉斯展开式:  $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ 、 $\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |A||B|$

⑥、范德蒙行列式: 大指标减小指标的连乘积;

⑦、特征值;

9. 对于  $n$  阶行列式  $|A|$ , 恒有:  $|\lambda E - A| = \lambda^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k \lambda^{n-k}$ , 其中  $S_k$  为  $k$  阶主子式;

### 10. 证明 $|A| = 0$ 的方法:

①、 $|A| = -|A|$ ;

②、反证法;

③、构造齐次方程组  $Ax = 0$ , 证明其有非零解;

④、利用秩, 证明  $r(A) < n$ ;

⑤、证明  $0$  是其特征值;

## b、2、矩阵

### 11. $A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵:

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$  (是非奇异矩阵);

$\Leftrightarrow r(A) = n$  (是满秩矩阵)

$\Leftrightarrow A$  的行 (列) 向量组线性无关;

$\Leftrightarrow$  齐次方程组  $Ax = 0$  有非零解;

$\Leftrightarrow \forall b \in R^n, Ax = b$  总有唯一解;

$\Leftrightarrow A$  与  $E$  等价;

$\Leftrightarrow A$  可表示成若干个初等矩阵的乘积;

$\Leftrightarrow A$  的特征值全不为  $0$ ;

$\Leftrightarrow A^T A$  是正定矩阵;

$\Leftrightarrow A$  的行 (列) 向量组是  $R^n$  的一组基;

$\Leftrightarrow A$  是  $R^n$  中某两组基的过渡矩阵;

12. 对于  $n$  阶矩阵  $A$ :  $AA^* = A^*A = |A|E$  无条件恒成立;

$$13. (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad (A^*)^T = (A^T)^* \\ (AB)^T = B^T A^T \quad (AB)^* = B^* A^* \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

14. 矩阵是表格, 推导符号为波浪号或箭头; 行列式是数值, 可求代数和;

15. 关于分块矩阵的重要结论, 其中均  $A$ 、 $B$  可逆:

$$\text{若 } A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \text{ 则:}$$

$$\text{I、 } |A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|;$$

$$\text{II、 } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\text{②、 } \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{主对角分块})$$

$$\text{③、 } \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}; \quad (\text{副对角分块})$$

$$\text{④、 } \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{拉普拉斯})$$

$$\text{⑤、 } \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad (\text{拉普拉斯})$$

### c、3、矩阵的初等变换与线性方程组

16. 一个  $m \times n$  矩阵  $A$ , 总可经过初等变换化为标准形, 其标准形是唯一确定的:  $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ ;

等价类: 所有与  $A$  等价的矩阵组成的一个集合, 称为一个等价类; 标准形为其形状最简单的矩阵;

对于同型矩阵  $A$ 、 $B$ , 若  $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \square B$ ;

17. 行最简形矩阵:

- ①、只能通过初等行变换获得;
- ②、每行首个非 0 元素必须为 1;
- ③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0;

18. 初等行变换的应用: (初等列变换类似, 或转置后采用初等行变换)

19. 若  $(A, E) \xrightarrow{r} (E, X)$ , 则  $A$  可逆, 且  $X = A^{-1}$ ;

②、对矩阵  $(A, B)$  做初等行变化, 当  $A$  变为  $E$  时,  $B$  就变成  $A^{-1}B$ , 即:  $(A, B) \xrightarrow{r} (E, A^{-1}B)$ ;

③、求解线性方程组: 对于  $n$  个未知数  $n$  个方程  $Ax = b$ , 如果  $(A, b) \xrightarrow{r} (E, x)$ , 则  $A$  可逆, 且  $x = A^{-1}b$ ;

**20. 初等矩阵和对角矩阵的概念:**

①、初等矩阵是行变换还是列变换, 由其位置决定: 左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵;

②、 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ , 左乘矩阵  $A$ ,  $\lambda_i$  乘  $A$  的各行元素; 右乘,  $\lambda_i$  乘  $A$  的各列元素;

③、对调两行或两列, 符号  $E(i, j)$ , 且  $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$ , 例如:  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ;

④、倍乘某行或某列, 符号  $E(i(k))$ , 且  $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$ , 例如:  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$ ;

⑤、倍加某行或某列, 符号  $E(ij(k))$ , 且  $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$ , 如:  $\begin{pmatrix} 1 & & k & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -k & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$ ;

**21. 矩阵秩的基本性质:**

①、 $0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$ ;

②、 $r(A^T) = r(A)$ ;

③、若  $A \square B$ , 则  $r(A) = r(B)$ ;

④、若  $P$ 、 $Q$  可逆, 则  $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$ ; (可逆矩阵不影响矩阵的秩)

⑤、 $\max(r(A), r(B)) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ; (※)

⑥、 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ ; (※)

⑦、 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$ ; (※)

⑧、如果  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 且  $AB = 0$ , 则: (※)

I、 $B$  的列向量全部是齐次方程组  $AX = 0$  解 (转置运算后的结论);

II、 $r(A) + r(B) \leq n$

⑨、若  $A$ 、 $B$  均为  $n$  阶方阵, 则  $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ ;

**22. 三种特殊矩阵的方幂:**

23. ①、秩为 1 的矩阵: 一定可以分解为列矩阵 (向量)  $\times$  行矩阵 (向量) 的形式, 再采用结合律;

24. ②、型如  $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  的矩阵: 利用二项展开式;

二项展开式:  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$ ;

注: I、 $(a+b)^n$  展开后有  $n+1$  项;

II、 $C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$   $C_n^0 = C_n^n = 1$



$$31. m \text{ 个 } n \text{ 维行向量所组成的向量组 } B: \beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T \text{ 构成 } m \times n \text{ 矩阵 } B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix};$$

含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应;

32. ①、向量组的线性相关、无关  $\Leftrightarrow Ax=0$  有、无非零解; (齐次线性方程组)

33. ②、向量的线性表出  $\Leftrightarrow Ax=b$  是否有解; (线性方程组)

34. ③、向量组的相互线性表示  $\Leftrightarrow AX=B$  是否有解; (矩阵方程)

35. 矩阵  $A_{m \times n}$  与  $B_{l \times n}$  行向量组等价的充分必要条件是: 齐次方程组  $Ax=0$  和  $Bx=0$  同解; ( $P_{101}$  例 14)

36.  $r(A^T A) = r(A)$ ; ( $P_{101}$  例 15)

37.  $n$  维向量线性相关的几何意义:

①、 $\alpha$  线性相关  $\Leftrightarrow \alpha = 0$ ;

②、 $\alpha, \beta$  线性相关  $\Leftrightarrow \alpha, \beta$  坐标成比例或共线 (平行);

③、 $\alpha, \beta, \gamma$  线性相关  $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$  共面;

38. 线性相关与无关的两套定理:

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$  必线性相关;

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$  必线性无关; (向量的个数加加减减, 二者为对偶)

若  $r$  维向量组  $A$  的每个向量上添上  $n-r$  个分量, 构成  $n$  维向量组  $B$ :

若  $A$  线性无关, 则  $B$  也线性无关; 反之若  $B$  线性相关, 则  $A$  也线性相关; (向量组的维数加加减减)

简言之: 无关组延长后仍无关, 反之, 不确定;

39. 向量组  $A$  (个数为  $r$ ) 能由向量组  $B$  (个数为  $s$ ) 线性表示, 且  $A$  线性无关, 则  $r \leq s$ ;

40. 向量组  $A$  能由向量组  $B$  线性表示, 则  $r(A) \leq r(B)$ ;

41. 向量组  $A$  能由向量组  $B$  线性表示

42.  $\Leftrightarrow AX=B$  有解;

43.  $\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$

44. 向量组  $A$  能由向量组  $B$  等价  $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$

45. 方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow$  存在有限个初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_l$ , 使  $A = P_1 P_2 \dots P_l$ ;

46. ①、矩阵行等价:  $A \sim^r B \Leftrightarrow PA = B$  (左乘,  $P$  可逆)  $\Leftrightarrow Ax=0$  与  $Bx=0$  同解

47. ②、矩阵列等价:  $A \sim^c B \Leftrightarrow AQ = B$  (右乘,  $Q$  可逆);

48. ③、矩阵等价:  $A \sim B \Leftrightarrow PAQ = B$  ( $P, Q$  可逆);

49. 对于矩阵  $A_{m \times n}$  与  $B_{l \times n}$ :

50. ①、若  $A$  与  $B$  行等价, 则  $A$  与  $B$  的行秩相等;

51. ②、若  $A$  与  $B$  行等价, 则  $Ax=0$  与  $Bx=0$  同解, 且  $A$  与  $B$  的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性;

52. ③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩;

53. ④、矩阵  $A$  的行秩等于列秩;

54. 若  $A_{m \times s} B_{s \times n} = C_{m \times n}$ , 则:
55. ①、 $C$  的列向量组能由  $A$  的列向量组线性表示,  $B$  为系数矩阵;
56. ②、 $C$  的行向量组能由  $B$  的行向量组线性表示,  $A^T$  为系数矩阵; (转置)
57. 齐次方程组  $Bx=0$  的解一定是  $ABx=0$  的解, 考试中可以直接作为定理使用, 而无需证明;
58. ①、 $ABx=0$  只有零解  $\Rightarrow Bx=0$  只有零解;
59. ②、 $Bx=0$  有非零解  $\Rightarrow ABx=0$  一定存在非零解;
60. 设向量组  $B_{n \times r}: b_1, b_2, \dots, b_r$  可由向量组  $A_{n \times s}: a_1, a_2, \dots, a_s$  线性表示为:
61.  $(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_s)K$  ( $B = AK$ )
62. 其中  $K$  为  $s \times r$ , 且  $A$  线性无关, 则  $B$  组线性无关  $\Leftrightarrow r(K) = r$ ; ( $B$  与  $K$  的列向量组具有相同线性相关性)  
(必要性:  $\because r = r(B) = r(AK) \leq r(K), r(K) \leq r, \therefore r(K) = r$ ; 充分性: 反证法)
63. 注: 当  $r = s$  时,  $K$  为方阵, 可当作定理使用;
64. ①、对矩阵  $A_{m \times n}$ , 存在  $Q_{n \times m}$ ,  $AQ = E_m \Leftrightarrow r(A) = m$ 、 $Q$  的列向量线性无关;
65. ②、对矩阵  $A_{m \times n}$ , 存在  $P_{n \times m}$ ,  $PA = E_n \Leftrightarrow r(A) = n$ 、 $P$  的行向量线性无关;
66.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关  
 $\Leftrightarrow$  存在一组不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$  成立; (定义)
- $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0$  有非零解, 即  $Ax=0$  有非零解;
- $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ , 系数矩阵的秩小于未知数的个数;
67. 设  $m \times n$  的矩阵  $A$  的秩为  $r$ , 则  $n$  元齐次线性方程组  $Ax=0$  的解集  $S$  的秩为:  $r(S) = n - r$ ;
68. 若  $\eta^*$  为  $Ax=b$  的一个解,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为  $Ax=0$  的一个基础解系, 则  $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关;

## e、5、相似矩阵和二次型

69. 正交矩阵  $\Leftrightarrow A^T A = E$  或  $A^{-1} = A^T$  (定义), 性质:
70. ①、 $A$  的列向量都是单位向量, 且两两正交, 即  $a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ ;
71. ②、若  $A$  为正交矩阵, 则  $A^{-1} = A^T$  也为正交阵, 且  $|A| = \pm 1$ ;
72. ③、若  $A, B$  正交阵, 则  $AB$  也是正交阵;
73. 注意: 求解正交阵, 千万不要忘记施密特正交化和单位化;
74. 施密特正交化:  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$   
 $b_1 = a_1$ ;  
 $b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$  .....  $b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \dots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$ ;
75. 对于普通方阵, 不同特征值对应的特征向量线性无关;
76. 对于实对称阵, 不同特征值对应的特征向量正交;
77. ①、 $A$  与  $B$  等价  $\Leftrightarrow A$  经过初等变换得到  $B$ ;
78.  $\Leftrightarrow PAQ = B$ ,  $P, Q$  可逆;

79.  $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$ ,  $A$ 、 $B$  同型;
80. ②、 $A$  与  $B$  合同  $\Leftrightarrow C^T AC = B$ , 其中可逆;
81.  $\Leftrightarrow x^T Ax$  与  $x^T Bx$  有相同的正、负惯性指数;
82. ③、 $A$  与  $B$  相似  $\Leftrightarrow P^{-1}AP = B$ ;
83. 相似一定合同、合同未必相似;
84. 若  $C$  为正交矩阵, 则  $C^T AC = B \Rightarrow A \square B$ , (合同、相似的约束条件不同, 相似的更严格);
85.  $A$  为对称阵, 则  $A$  为二次型矩阵;
86.  $n$  元二次型  $x^T Ax$  为正定;
87.  $\Leftrightarrow A$  的正惯性指数为  $n$ ;
88.  $\Leftrightarrow A$  与  $E$  合同, 即存在可逆矩阵  $C$ , 使  $C^T AC = E$ ;
89.  $\Leftrightarrow A$  的所有特征值均为正数;
90.  $\Leftrightarrow A$  的各阶顺序主子式均大于 0;
91.  $\Rightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0$ ; (必要条件)

### 第三部分: 概率公式

#### 1. 随机事件及其概率

$$A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A$$

$$\text{吸收律: } A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup (AB) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$A - B = A\bar{B} = A - (AB)$$

$$\text{反演律: } \overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B} \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

#### 2. 概率的定义及其计算

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\text{若 } A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$\text{对任意两个事件 } A, B, \text{ 有 } P(B - A) = P(B) - P(AB)$$

加法公式: 对任意两个事件  $A, B$ , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \quad 3. \text{ 条件概率}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \quad \text{全概率公式}$$

$$(P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Bayes 公式

$$P(B_k|A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

#### 4. 随机变量及其分布

分布函数计算

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

#### 5. 离散型随机变量

(1) 0-1 分布

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

(2) 二项分布  $B(n, p)$

若  $P(A) = p$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

\* Poisson 定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$$

$$\text{有 } \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

(3) Poisson 分布  $P(\lambda)$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## 6. 连续型随机变量

(1) 均匀分布  $U(a, b)$ 

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \\ \frac{x-a}{b-a}, & \\ 1 & \end{cases}$$

(2) 指数分布  $E(\lambda)$ 

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(3) 正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ 

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

\*  $N(0, 1)$  — 标准正态分布

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad -\infty < x < +\infty$$

## 7. 多维随机变量及其分布

二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

边缘分布函数与边缘密度函数

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv du$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$$

## 8. 连续型二维随机变量

(1) 区域  $G$  上的均匀分布,  $U(G)$ 

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 二维正态分布

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

9. 二维随机变量的条件分布

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \quad f_X(x) > 0$$

$$= f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \quad f_Y(y) > 0$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x) dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

## 10. 随机变量的数字特征

数学期望

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

随机变量函数的数学期望

$X$  的  $k$  阶原点矩  $E(X^k)$

$X$  的  $k$  阶绝对原点矩  $E(|X|^k)$

$X$  的  $k$  阶中心矩  $E((X - E(X))^k)$

$X$  的方差  $E((X - E(X))^2) = D(X)$

$X, Y$  的  $k+l$  阶混合原点矩  $E(X^k Y^l)$

$X, Y$  的  $k+l$  阶混合中心矩

$$E((X - E(X))^k (Y - E(Y))^l)$$

$X, Y$  的二阶混合原点矩  $E(XY)$

$X, Y$  的二阶混合中心矩  $X, Y$  的协方差

$$E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$X, Y$  的相关系数

$$E\left(\frac{(X - E(X))(Y - E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right) = \rho_{XY}$$

$X$  的方差

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

协方差

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \pm \frac{1}{2}(D(X \pm Y) - D(X) - D(Y))$$

$$\text{相关系数 } \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$